Рассмотрим теперь случай, когда для конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ выполняется равенство (2.7). Повторяя аналогичные рассуждения, приходим к системе:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_i^j = a_{ii}^j \omega^i, \ \omega_i^3 = \omega^j, \ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_0 \omega^j, \\ \omega_3^i = \omega^i, \ \Omega = 0, \ d\lambda_0 = 0, \ \omega_0^0 = 0, \end{cases} \qquad (3.6)$$

которая определяет подкласс ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$ конгруэнций ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ с произволом двух функций одного аргумента. Конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ являются подклассом конгруэнций $\mathfrak{A}_1$, рассмотренных в [4], а конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$, как и ${}^{(1)}\mathcal{K}_3^0$, являются подклассом конгруэнций $\mathcal{N}'$ [3]. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3.1. Существуют два и только два класса конгруэнций ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ - конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$, определенные вполне интегрируемой системой (3.5), и конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$, определяемые с произволом двух функций одного аргумента системой (3.6).

Обозначим

$$B = (1+\lambda_0)A_0 + (1+c_0)A_3, \quad C = A_0 - A_3. \qquad (3.7)$$

Т е о р е м а 3.2. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ вырождаются в линии, лежащие в инвариантной плоскости $(A_1 A_2 B)$; прямолинейная конгруэнция $(A_0 A_3)$ является связкой прямых с центром в точке C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega^2 B, \ dA_2 = -\omega_1^1 A_2 + \omega^1 B, \ d(A_1 A_2 B) = 0, \ dC = 0.$$

Т е о р е м а 3.3. Фокальные поверхности (A_0) и (A_3) конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ являются линейчатыми квадриками и имеют кратность три.

Утверждение непосредственно вытекает из принадлежности ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,1}^0$ классу $\mathfrak{A}_1$ [3], для которого оно справедливо.

Так как уравнения, определяющие фокальные точки квадрики $Q \in {}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$, совпадают с уравнениями (2.12) и так как $\mathcal{K}_{3,2}^0 \subset \mathcal{N}^1 \subset \mathcal{N}$ [3], справедлива

Т е о р е м а 3.4. Если квадрика $Q \in {}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$ не является квадрикой Ли поверхности (A_0), то фокальными поверхностями конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_{3,2}^0$ являются: четырехкратная фокальная поверхность (A_0), поверхность (A_3) и поверхности (M_1), (M_2), (M_3), определяемые формулами (2.10).

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная

геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1977. Вып.8. С.32-42.

2. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.105-109.

3. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1981. Вып.12. С.44-47.

4. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции $\mathfrak{A}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.126-130.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР КОНИК В A_3

Е.А.Щ е р б а к

(Калининградский государственный университет)

В данной статье продолжаются исследования специальных видов конгруэнций пар коник в трехмерном аффинном пространстве, начатые в [1]. Рассматриваются конгруэнции пар коник $\{F_1, F_2\}$, где коника F_1 имеет неподвижный центр, а коника F_2 проходит через центр коники F_1 и имеет центр, лежащий на конике F_1. Назовем такие конгруэнции коник конгруэнциями K.

Исследования проводятся в каноническом репере $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha = 1,2,3)$, начало A которого совмещено с центром коники F_1, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ $(i = 1,2)$ расположены на конике F_1 так, что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно F_1, причем конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ помещен в центр коники F_2, а конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ - в точку пересечения двух касательных к конике F_2, одна из которых проведена в точке A, а вторая параллельна вектору $\bar{e}_1$. Уравнения коник F_1 и F_2 в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$F_1: \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0; \qquad (1)$$

$$F_2: \quad (x^1 - 1)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad x^2 = 0. \qquad (2)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции K записывается в виде:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^i = \Gamma_\alpha^{ik}\Omega_k, \quad \omega_3^3 = \Gamma_3^{3i}\Omega_i, \tag{3}$$

где главные формы $\Omega_k = \omega_k^3$ $(k=1,2)$ приняты за независимые формы конгруэнции $\mathcal{K}$. Анализируя систему уравнений (3), приходим к выводу, что конгруэнции $\mathcal{K}$ существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов. Координаты фокальных точек коник F_1 и F_2 конгруэнций (F_1) и (F_2) находятся из уравнений (I), (2) и соответственно уравнений:

$$(x^1)^3\Gamma_1^{12}-(x^2)^3\Gamma_2^{21}+(x^1)^2x^2[\Gamma_2^{12}+\Gamma_1^{22}-\Gamma_1^{11}]+x^1(x^2)^2(\Gamma_2^{22}-\Gamma_2^{11}-\Gamma_1^{21})=0, \tag{4}$$

$$[(x^1)^2\Gamma_1^{11}+x^1x^2(\Gamma_3^{11}+1)+(x^3)^2\Gamma_3^{31}-x^1\Gamma_1^{11}-x^3\Gamma_3^{11}]\cdot(x^1\Gamma_1^{22}+x^3\Gamma_3^{22})- \tag{5}$$

$$-[(x^1)^2\Gamma_1^{12}+x^1x^3\Gamma_3^{12}+(x^3)^2\Gamma_3^{32}-x^1\Gamma_1^{12}-x^3\Gamma_3^{12}]\cdot(x^1\Gamma_1^{21}+x^3\Gamma_3^{21})=0.$$

Очевидно, что точка A является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Обозначим через M и $L_{1,2}$ точки пересечения коники F_2 с ее диаметрами, параллельными соответственно векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$ т.е. $M(2,0,0)$ и $L_{1,2}(1,0,\pm 1)$. Через E_1^* и E_2^* обозначим точки, симметричные точкам E_1 и E_2 относительно A. Получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы точки E_i и E_i^* являлись фокальными точками коники F_1 конгруэнции (F_1), необходимо и достаточно, чтобы на поверхности (E_i) касательная вдоль координатной линии $\Omega_i = 0$ была параллельна плоскости $A\bar{e}_k\bar{e}_3$ $(i \neq k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие параллельности касательной к линии $\Omega_i = 0$ на поверхности (E_i) имеет вид:

$$\Gamma_i^{ik} = 0 \quad (\text{по } i \text{ не суммировать, } i \neq k). \tag{6}$$

Подставляя условие (6) и координаты точек E_i и E_i^* в (4), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Точка M тогда и только тогда является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^1 и ω_1^2 – линейно зависимые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие зависимости форм ω_1^1 и ω_1^2 имеет вид:

$$\Gamma_1^{11}\Gamma_1^{22} - \Gamma_1^{12}\Gamma_1^{21} = 0. \tag{7}$$

Перепишем уравнение (5) для определения координат фокальных точек коники F_2 конгруэнции (F_2) в виде

$$((x^1)^3 - x^1)(\Gamma_1^{11}\Gamma_1^{22} - \Gamma_1^{12}\Gamma_1^{21}) + x^3\cdot B = 0, \tag{8}$$

где

$$B = (x^1)^2\Gamma_1^{11}\Gamma_3^{22} + [x^1(\Gamma_3^{11}+1)+(x^3)^2\Gamma_3^{31}-\Gamma_3^{11}]\cdot(x^1\Gamma_1^{22}+x^3\Gamma_3^{22}) -$$

$$-(x^1)^2\Gamma_1^{12}\Gamma_3^{21} - [x^1\Gamma_3^{12}+(x^3)^2\Gamma_3^{32}-\Gamma_3^{12}]\cdot(x^1\Gamma_1^{21}+x^3\Gamma_3^{21}).$$

Из (7) и (8) следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 3. Точки $L_{1,2}(1,0,\pm 1)$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_3^3 и $\omega_1^2 \pm \omega_3^2$ линейно зависимые.

Т е о р е м а 4. Точки $L_{1,2}(1,0,\pm 1)$ тогда и только тогда являются фокусами луча $E_1\bar{e}_3$ конгруэнции $(E_1\bar{e}_3)$, когда формы $\omega_1^1 \pm \omega_3^1$ и $\omega_3^2 \pm \omega_1^2$ линейно зависимые.

Т е о р е м а 5. Точка E_1 тогда и только тогда является фокусом луча $E_1\bar{e}_3$ конгруэнции $(E_1\bar{e}_3)$, когда формы ω_1^1 и ω_1^2 линейно зависимые.

Библиографический список

1. Щ е р б а к Е.А. Об одном специальном виде конгруэнций пар коник в A_3 // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып. 21. С.109-113.